Suites adjacentes

Exercice 1 [02271] [Correction]
Soient $\theta \in]0\,;\pi/2[$ et

$$u_n = 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}, v_n = 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 2 [00325] [Correction]
On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 3 [02272] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.
On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

Exercice 4 [02273] [Correction]
[Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz] Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 5 [02274] [Correction]
[Irrationalité du nombre de Néper] Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.
On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $a_q < \mathrm{e} < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 6 [02275] [Correction]
[Moyenne arithmético-géométrique]

a) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leq a+b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

c) Établir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

d) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.

e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 7 [00324] [Correction]
[Irrationalité de e] On pose pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, montrer que $u_n \to \mathrm{e}$.

c) On suppose que $\mathrm{e} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. En considérant $q.q!u_q$ et $q.q!v_q$ obtenir une absurdité.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Via $\sin 2a = 2\sin a \cos a$, on obtient

$$u_n = 2^{n+1} \sin\frac{\theta}{2^{n+1}} \cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \leq u_{n+1}$$

Via $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$, on obtient

$$v_n = 2^{n+1} \frac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1-\tan^2(\theta/2^{n+1})} \geq v_{n+1}$$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u_n \to \theta$ et $v_n \to \theta$ d'où $v_n - u_n \to 0$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite commune égale à θ.

Exercice 2 : [énoncé]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 0$$

De même $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et aisément $v_n - u_n \to 0$ d'où l'adjacence de ces deux suites.
Notons ℓ leur limite commune, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$$

Exercice 3 : [énoncé]
On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 0$$

et

$$S'_n - S_n = \frac{1}{n} \to 0$$

Exercice 4 : [énoncé]
D'une part

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

D'autre part

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

Enfin

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$$

Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) étant adjacentes, elles convergent vers une même limite.
Par conséquent (S_n) converge aussi vers cette limite.

Exercice 5 : [énoncé]

a)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc (a_n) est strictement croissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

donc (b_n) est strictement décroissante.
Enfin

$$b_n - a_n = \frac{1}{n.n!} \to 0$$

b) On a

$$a_q < a_{q+1} \leq \mathrm{e} \leq b_{q+1} < b_q$$

Par suite

$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q.q!}$$

puis

$$q.q!a_q < p.q! < q.q!a_q + 1$$

Or $p.q! \in \mathbb{Z}$ et $q.q!.a_q = q\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}$ car la somme apparaît comme une somme d'entiers. C'est absurde.

Exercice 6 : [énoncé]

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ donne l'inégalité demandée.

b) Pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n$ en vertu de a.
$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{2v_n}{2} = v_n$.

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ.
La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante est minorée par u_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ'.
En passant la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$.

d) Si $b = a$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à a et donc $M(a,a) = a$.
Si $b = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à 0 et donc $M(a,0) = 0$.

e) Notons (u'_n) et (v'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$.
Par récurrence, $u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

Exercice 7 : [énoncé]

a) Aisément (u_n) est croissante (v_n) décroissante et $v_n - u_n \to 0$.

b) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{M_{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x\in[0;1]} \left|(\mathrm{e}^x)^{(n+1)}\right| = \mathrm{e}$. Pour $x = 1$, on obtient

$$|\mathrm{e} - u_n| \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \to 0$$

donc $u_n \to \mathrm{e}$.

c) Par la stricte monotonie des suites (u_n) et (v_n) on a $u_n < \mathrm{e} < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$q.q!u_q$ est un entier et $q.q!v_q$ est l'entier consécutif. Or $q.q!u_q < q.q!\,\mathrm{e} < q.q!v_q$ donc $q.q!\,\mathrm{e}$ ne peut être entier. Or $q.q!\,\mathrm{e} = p.q! \in \mathbb{N}$. Absurde.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD